

CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE - CZASOWE

SPIS TREŚCI

Modele dynamiki	1
Metoda operatorowa	2
Transmitancja operatorowa	3
Charakterystyki czasowe	3
Charakterystyki czasowe członów podstawowych	5
Człon proporcjonalny	5
Człon inercyjny pierwszego rzędu	6
Człon całkujący idealny pierwszego rzędu	7
Człon różniczkujący idealny	8
Człon różniczkujący rzeczywisty	9
Człon oscylacyjny drugiego rzędu	10
Człon opóźniający	11
Pytania kontrolne	12
Literatura	12
Materiały dodatkowe	12

MODELE DYNAMIKI

Charakterystyki dynamiczne opisują zachowanie układu podczas zmian sygnałów w czasie. W przeciwieństwie do charakterystyk statycznych uwzględniają one bezwładność, opóźnienia oraz sposób przechodzenia układu pomiędzy kolejnymi stanami ustalonymi.

Dynamiczny model układu przedstawia się często w postaci schematu blokowego. Blok oznacza obiekt lub układ poddawany analizie, natomiast sygnał $x(t)$ jest sygnałem wejściowym (wymuszeniem) doprowadzanym do obiektu. Sygnał $y(t)$ stanowi odpowiedź układu, czyli sygnał wyjściowy. Zależność pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym opisuje model matematyczny obiektu, np. w postaci równania różniczkowego lub transmitancji.

Warto zauważyć, że różne typy obiektów mogą w odmienny sposób reagować na to samo wymuszenie wejściowe $x(t)$. Oznacza to, że dla identycznego sygnału wejściowego przebieg sygnału wyjściowego $y(t)$ może mieć różny kształt, czas narastania, przeregulowanie lub opóźnienie.

Analiza odpowiedzi układu na wymuszenia pozwala określić jego właściwości dynamiczne oraz dobrać odpowiedni model matematyczny opisujący jego zachowanie.

Układy ciągłe o parametrach skupionych opisuje się najczęściej za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Natomiast układy o parametrach rozłożonych, w których wielkości fizyczne zależą zarówno od czasu, jak i położenia, opisuje się za pomocą równań różniczkowych cząstkowych.

W przypadku układów liniowych i stacjonarnych (**LTI** – *Linear Time-Invariant*) współczynniki równań różniczkowych nie zmieniają się w czasie, co pozwala na zastosowanie **przekształcenia Laplace'a**. Natomiast układy dyskretne opisuje się równaniami różnicowymi, a do ich analizy wykorzystuje się transformatę Z .



Rys. 1. Schemat blokowy układu dynamicznego, gdzie $x(t)$ oznacza sygnał wejściowy (wymuszenie), $y(t)$ sygnał wyjściowy (odpowiedź układu), a blok „człon” reprezentuje analizowany element lub proces.

METODA OPERATOROWA

Przekształcenie Laplace'a $\mathcal{L}$ odwzorowuje funkcję czasu $f(t)$ z dziedziny czasu t do dziedziny zmiennej zespolonej s . Zmienna zespolona s , nazywana zmienną operatorową Laplace'a, ma postać:

$$s = \sigma + j\omega \tag{1}$$

gdzie:

- σ – część rzeczywista odpowiedzialna za wzrost lub zanik sygnału
- ω – część urojona związana z właściwościami oscylacyjnymi sygnału

Przekształcenie Laplace'a $\mathcal{L}$ polega na pomnożeniu funkcji czasu $f(t)$ przez czynnik e^{-st} i jej całkowaniu w granicach od zera do nieskończoności:

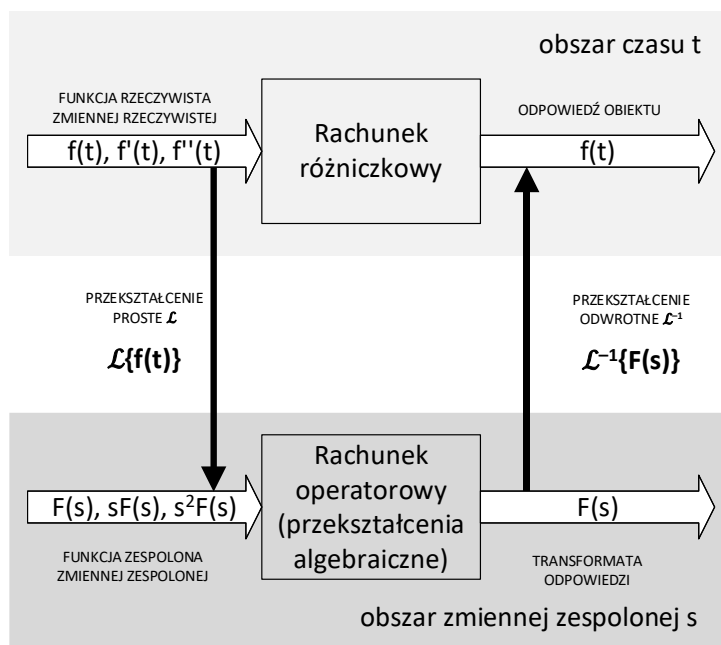
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \tag{2}$$

Dzięki temu równanie różniczkowe zostaje zastąpione równaniem algebraicznym.

Po rozwiązaniu równania algebraicznego, wynik sprowadza się do dziedziny czasu za pomocą odwrotnego przekształcenia $\mathcal{L}^{-1}$, wykorzystując tzw. wzór Bromwicha–Mellina. W tym celu funkcję zmiennej zespolonej $F(s)$ mnoży się przez e^{st} , całkuje wzdłuż pionowej prostej na płaszczyźnie zespolonej i mnoży przez współczynnik $\frac{1}{2\pi j}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \end{aligned} \tag{3}$$

Bezpośrednie rozwiązywanie równań różniczkowych w dziedzinie czasu jest często bardzo pracochłonne. Z tego względu w analizie układów automatyki powszechnie stosuje się **metodę operatorową** opartą na opisanym przekształceniu.



Rys. 2. Schemat metody operatorowej.

TRANSMITANCJA OPERATOROWA

Transmitancja operatorowa jest funkcją wymiarną zmiennej zespolonej s , stanowiącą matematyczny opis właściwości dynamicznych układu. Definiuje się ją jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (4)$$

gdzie:

$G(s)$ – transmitancja operatorowa układu,
 $Y(s)$ – transformata Laplace'a sygnału wyjściowego,
 $X(s)$ – transformata Laplace'a sygnału wejściowego.

Charakteryzuje się ona następującymi cechami:

- Zależy wyłącznie od struktury i parametrów samego układu, a nie od sygnału wejściowego.
- Nie odwzorowuje jednoznacznie budowy fizycznej obiektu – różne układy (np. elektryczne, hydrauliczne i mechaniczne) mogą mieć dokładnie tę samą transmitancję operatorową.
- Umożliwia łatwe wyznaczenie odpowiedzi układu na dowolne, dające się przekształcić wymuszenie.
- Może zostać wyznaczona zarówno analitycznie z równań różniczkowych, jak i eksperymentalnie na podstawie odpowiedzi układu na znane sygnały testowe.

Znając transmitancję oraz sygnał wejściowy, odpowiedź układu wyznacza się z zależności:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \quad (5)$$

a następnie przeprowadza odwrotne przekształcenie Laplace'a:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\} \quad (6)$$

CHARAKTERYSTYKI CZASOWE

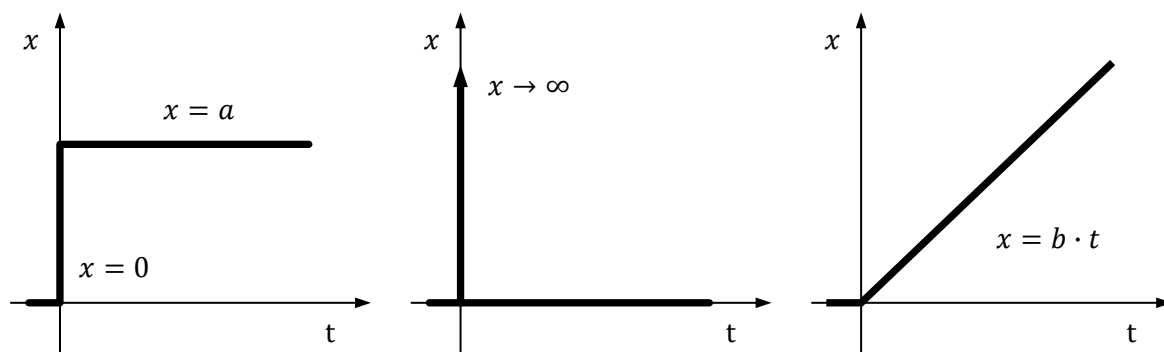
Charakterystyką czasową nazywa się przebieg sygnału wyjściowego układu w funkcji czasu w odpowiedzi na określone wymuszenie podane na wejście układu znajdującego się początkowo w stanie równowagi.

Zastosowanie znormalizowanych sygnałów testowych umożliwia porównywanie właściwości dynamicznych różnych układów oraz wyznaczanie ich parametrów dynamicznych.

Najczęściej stosowane sygnały testowe to wymuszenie skokowe, impulsowe i rampowe (Rys. 3, Tab. 1).

W praktyce najczęściej analizowana jest odpowiedź na skok jednostkowy ($a = 1$), ponieważ pozwala ona w prosty sposób wyznaczyć najważniejsze parametry dynamiczne układu, takie jak stała czasowa, opóźnienie, przeregulowanie czy czas ustalania.

Oprócz charakterystyk czasowych do opisu właściwości dynamicznych wykorzystuje się również charakterystyki częstotliwościowe, omawiane w dalszej części kursu.



Rys. 3. Typowe wymuszenia: skokowe, impulsowe, liniowe.

Tab. 1. Typowe charakterystyki czasowe oraz odpowiadające im wymuszenia

typ charakterystyki	charakterystyka skokowa	charakterystyka impulsowa	charakterystyka rampowa
typ wymuszenia $x(t)$	wymuszenie skokowe $x(t)$	wymuszenie impulsowe $\delta(t)$	wymuszenie liniowe zależne od czasu $x(t)$
opis wymuszenia	$x(t) = 0 \cdot \mathbf{1}(t) \text{ dla } t < 0$ $x(t) = a \cdot \mathbf{1}(t) \text{ dla } t \geq 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ $\delta(t) = 0 \text{ dla } t \neq 0$ $\delta(t) = \infty \text{ dla } t = 0$	$x(t) = 0 \text{ dla } t < 0$ $x(t) = b \cdot t \cdot \mathbf{1}(t) \text{ dla } t \geq 0$
Transformata wymuszenia $X(s)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{a}{s}$	$X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{b}{s^2}$
Charakterystyka czasowa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\}$	$y(t) = h(t)$ $= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{a}{s}\right\}$	$y(t) = k(t)$ $= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot 1\}$	$y(t) = v(t)$ $= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{b}{s^2}\right\}$

CHARAKTERYSTYKI CZASOWE CZŁONÓW PODSTAWOWYCH

Dla przedstawionych wcześniej w tej instrukcji podstawowych członów automatyki można wyznaczyć ich transmitancję oraz charakterystyki. Poniżej podano wybrane charakterystyki czasowe wszystkich członów podstawowych obliczone na podstawie $Y(s)$ liczonych jako iloczyn transmitancji tych członów oraz transformat sygnału wejściowego $\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\}$ podanych w Tab. 1

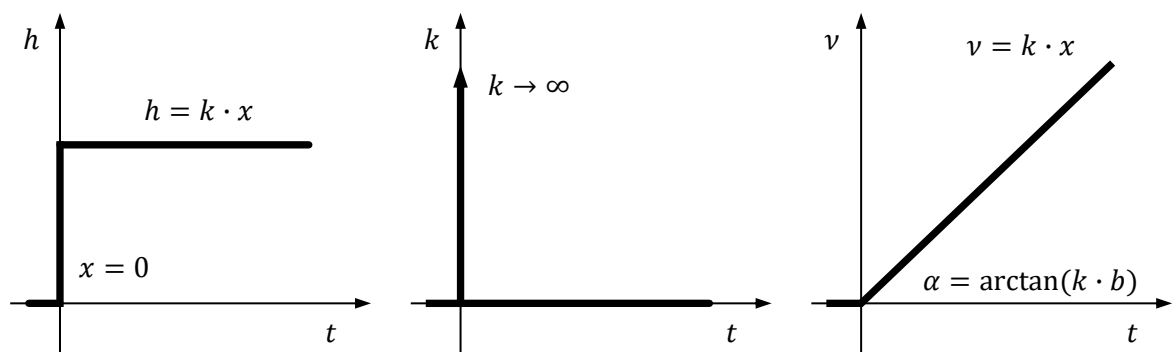
CZŁON PROPORCJONALNY

W członie proporcjonalnym (bezinercyjnym) w każdej chwili czasu sygnał wyjściowy $y(t)$ jest proporcjonalny do sygnału wejściowego $x(t)$.

Transmitancja członu proporcjonalnego: $G(s) = k$
gdzie k to współczynnik wzmocnienia, stosunek odpowiedzi $y(t)$ do wymuszenia $x(t)$.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = k \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa $K(s) = k \cdot 1$ $k(t) = k \cdot \delta(t)$
- rampowa $V(s) = k \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$

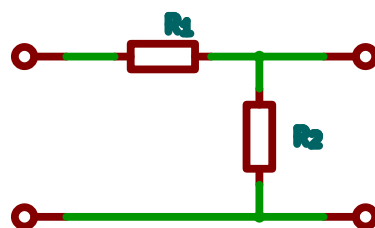


Rys. 4. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu proporcjonalnego.

Przykładem realizacji członu proporcjonalnego jest rezystancyjny dzielnik napięcia.

Transmitancja czwórnika jest dana wzorem:

$$G(s) = k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{7}$$



Rys. 5. Czwórnik proporcjonalny.

CZŁON INERCYJNY PIERWSZEGO RZĘDU

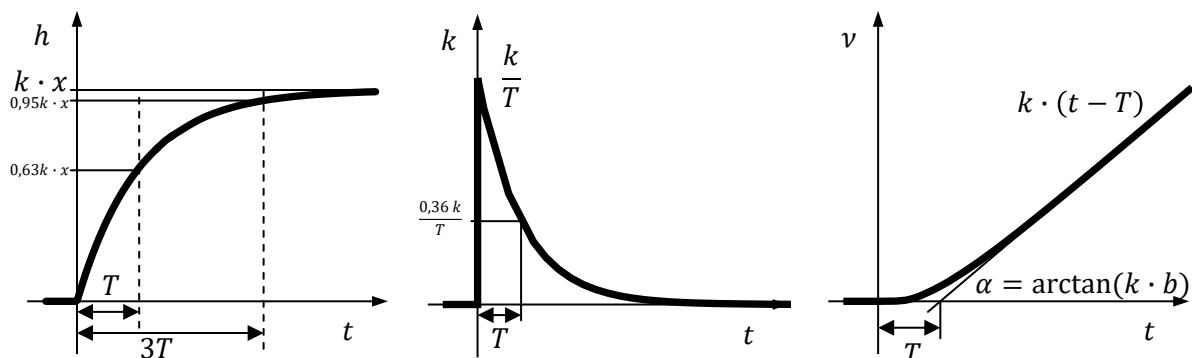
Odpowiedź czasowa członu na skutek pewnej bezwładności (inercji) charakteryzuje się występowaniem stanu przejściowego, po zaniknięciu, którego sygnał wyjściowy staje się proporcjonalny do sygnału wejściowego (ze współczynnikiem proporcjonalności k)

Transmitancja członu inercyjnego: $G(s) = \frac{k}{Ts+1}$

gdzie k to współczynnik wzmacnienia, T to stała czasowa

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa $K(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot 1$ $k(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \mathbf{1}(t)$
- rampowa $V(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot \left(t - T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right) \cdot \mathbf{1}(t)$

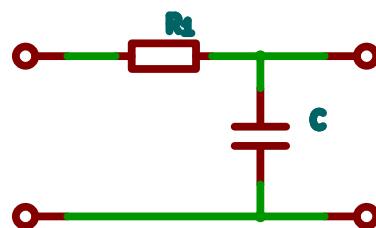


Rys. 6. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu inercyjnego I-rzędu

Przykład realizacji członu inercyjnego przedstawia czwórnik RC inercyjny.

Transmitancja czwornika RC jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{1}{RCs+1} \quad (8)$$



Rys. 7. Czwórnik RC inercyjny.

CZŁON CAŁKUJĄCY IDEALNY PIERWSZEGO RZĘDU

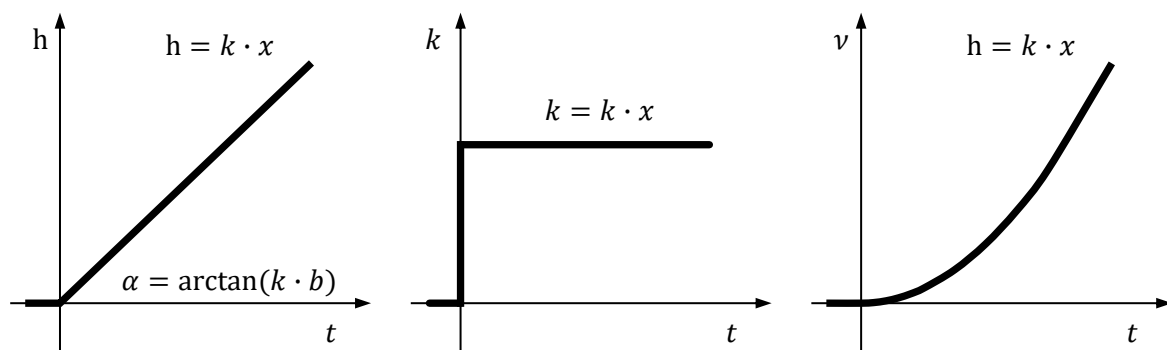
W członie całkującym idealnym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do całki sygnału wejściowego.

Transmitancja członu całkującego idealnego pierwszego rzędu: $G(s) = \frac{k}{s} = \frac{1}{T_i s}$
gdzie k to współczynnik wzmocnienia (tzw. prędkościowego), T_i czas całkowania

Jeżeli na wejściu członu całkującego idealnego pojawi się sygnał stały to sygnał wyjściowy będzie narastał w funkcji czasu liniowo. Współczynnik k reprezentuje stosunek pochodnej względem czasu (prędkości) odpowiedzi do wartości wymuszenia, stąd też nazywany jest wzmocnieniem prędkościowym.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa $K(s) = \frac{k}{s} \cdot 1$ $k(t) = k \cdot \mathbf{1}(t)$
- rampowa $V(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = \frac{k \cdot b}{2} \cdot t^2 \cdot \mathbf{1}(t)$



Rys. 8. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu całkującego idealnego I-rzędu.

CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY IDEALNY

W członie różniczkującym idealnym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do pochodnej sygnału wejściowego względem czasu.

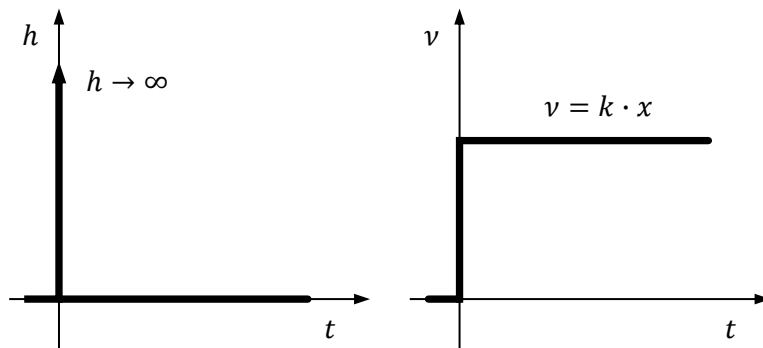
Transmitancja członu różniczkującego idealnego: $G(s) = ks = T_d s$

gdzie k to współczynnik wzmocnienia, T_d czas różniczkowania

Ponieważ stopień licznika transmitancji jest wyższy od stopnia mianownika człon ten jest niemożliwy do zrealizowania w praktyce i może być modelowany jedynie w przybliżeniu.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = ks \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \delta(t)$
- rampowa $V(s) = ks \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot \mathbf{1}(t)$



Rys. 9. Charakterystyka skokowa i rampowa dla członu różniczkującego idealnego.

CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY RZECZYWISTY

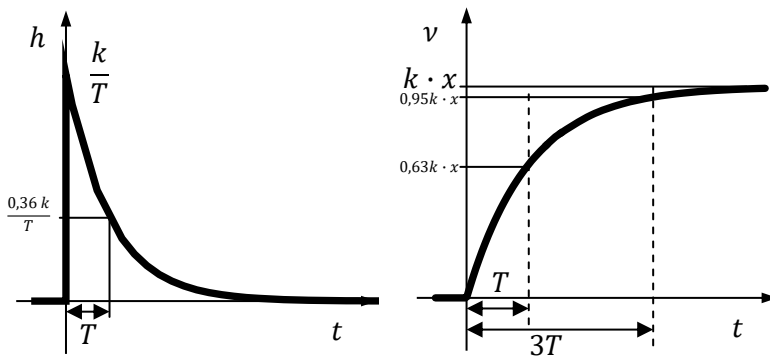
Człon różniczkujący rzeczywisty jest układem złożonym z szeregowo połączonych członów: inercyjnego i różniczkującego idealnego.

Transmitancja członu różniczkującego rzeczywistego: $G(s) = \frac{ks}{Ts+1}$

gdzie k to współczynnik wzmocnienia, T to stała czasowa

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = \frac{ks}{Ts+1} \cdot \frac{a}{s} \quad h(t) = \frac{k}{T} \cdot a \cdot \left(e^{-\frac{1}{T}t}\right) \cdot \mathbf{1}(t)$
- rampowa $V(s) = \frac{ks}{Ts+1} \cdot \frac{b}{s^2} \quad v(t) = k \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) \cdot \mathbf{1}(t)$

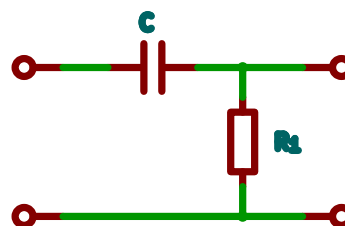


Rys. 10. Charakterystyka skokowa i rampowa dla członu różniczkującego rzeczywistego.

Przykładem realizacji członu różniczkującego rzeczywistego jest czwórnik RC różniczkujący rzeczywisty.

Transmitancja jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{ks}{Ts+1} = \frac{RCs}{RCs+1}$$



Rys. 11. Czwórnik RC różniczkujący rzeczywisty.

CZŁON OSCYLACYJNY DRUGIEGO RZĘDU

W członie oscylacyjnym odpowiedź na wymuszenie może mieć charakter oscylacyjny. Przebieg czasowy odpowiedzi skokowej jest przebiegiem drgającym o pulsacji tłumionej ω_0 . O charakterze tych oscylacji decyduje współczynnik tłumienia drgań ξ . W zależności od jego wartości odpowiedź może mieć postać drgań nietłumionych ($\xi = 0$), tłumionych ($\xi > 0$), lub narastających ($\xi < 0$) (Rys. 12). Im większa wartość współczynnika tłumienia, tym szybciej zanikają oscylacje i układ osiąga stan ustalony.

Transmitancja członu oscylacyjnego: $G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi s+\omega_0^2}$

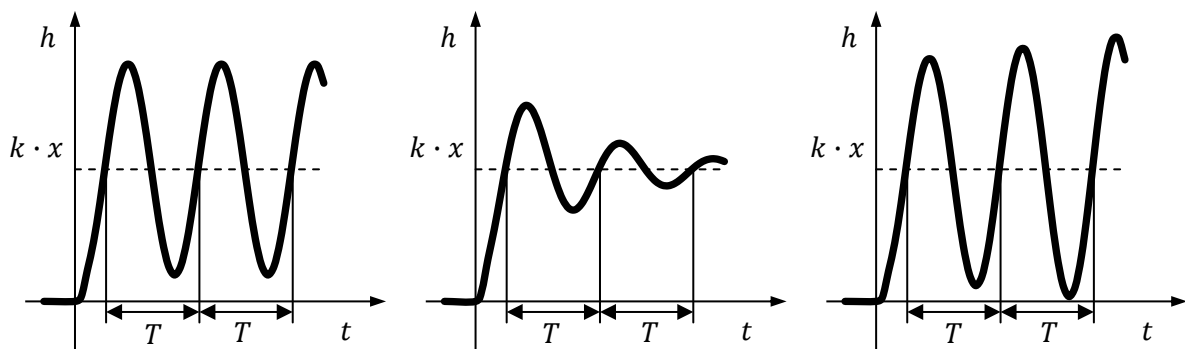
gdzie ω_0 to pulsacja drgań nietłumionych, ξ to współczynnik tłumienia

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

● skokowa

$$H(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi s+\omega_0^2} \frac{a}{s}$$

$$h(t) = k \cdot a \cdot \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 \cdot t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \right) \cdot 1(t)$$



Rys. 12. Charakterystyka skokowa dla członu oscylacyjnego dla różnych wartości współczynnika tłumienia $\xi = 0$, $\xi > 0$ oraz $\xi < 0$.

CZŁON OPÓŹNIAJĄCY

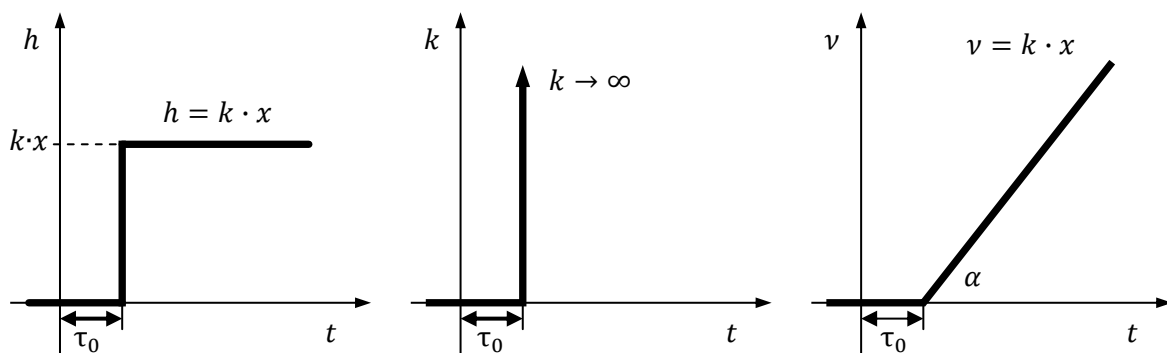
Odpowiedź członu opóźniającego jest identyczna z sygnałem wejściowym, jednak występuje po upływie określonego czasu opóźnienia τ_0 .

Transmitancja członu opóźniającego: $G(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s}$

gdzie k to współczynnik wzmocnienia, τ_0 opóźnienie

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \mathbf{1}(t - \tau_0)$
- impulsowa $K(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s} \cdot 1$ $k(t) = k \cdot \delta(t - \tau_0)$
- rampowa $V(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot (t - \tau_0) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_0)$



Rys. 13. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu opóźniającego.

PYTANIA KONTROLNE

1. Podaj wzór na transmitancję operatorową oraz go omów.
2. Do czego służy proste i odwrotne przekształcenie Laplace'a?
3. Co trzeba znać, aby obliczyć odpowiedź układu?
4. Czym różnią się wymuszenia: skokowe, impulsowe i rampowe?
5. Czym różni się wymuszenie od charakterystyki czasowej?
6. Czym różni się $H(s)$ od $h(t)$?
7. Jaki wpływ na odpowiedź układu ma typ członu?
8. Który człon nie jest możliwy do zrealizowania w praktyce? Dlaczego?
9. Dwa układy mają ten sam sygnał wejściowy, ale jeden reaguje natychmiast, a drugi z opóźnieniem. Który z nich wymaga opisu dynamicznego?

LITERATURA

- [1] Rosołowski E., Podstawy regulacji automatycznej, Wrocław 2021. [Dostęp online](#)
- [2] Wiśniewski T., Zaawansowane metody syntezy układów regulacji bloku energetycznego, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011, 144 s. ISBN 978-83-7493-621-7. [Dostęp online](#)
- [3] Stefański T., Teoria sterowania. Cz. I, Układy liniowe, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce. [Dostęp online](#)
- [4] Mikulczyński T. (red.), Laboratorium podstaw automatyki i automatyzacji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005. [Dostęp online](#)
- [5] Zespół Automatyki, Charakterystyki czasowe członów dynamicznych, instrukcja do ćwiczenia laboratoryjnego, Częstochowa. [Dostęp online](#)

MATERIAŁY DODATKOWE

- [1] The MathWorks, Inc., MATLAB and Simulink. [Dostęp online](#)
- [2] Artikel Software, Free Download Engineering Ebooks. [Dostęp online](#)
- [3] Kuo B. C., Golnaraghi F., Automatic Control Systems, 8th ed., Wiley — materiały dodatkowe do książki. [Dostęp online](#)
- [4] The MathWorks, Inc., Digital Control of Dynamic Systems, 3e – MATLAB programs, MATLAB Central File Exchange. [Dostęp online](#)