

CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE - CZASOWE

SPIS TREŚCI

Modele dynamiki	1
Metoda operatorowa	1
Transmitancja operatorowa	2
Charakterystyki czasowe	2
Charakterystyki czasowe członów podstawowych	4
Człon proporcjonalny	4
Człon inercyjny pierwszego rzędu	5
Człon całkujący idealny pierwszego rzędu	6
Człon różniczkujący idealny	7
Człon różniczkujący rzeczywisty	8
Człon oscylacyjny	9
Człon opóźniający	10
Stanowisko dydaktyczne	11
Zadania do wykonania	11
Opracowanie sprawozdania	12
Pytania kontrolne	13
Literatura	13

MODELE DYNAMIKI

Charakterystyki dynamiczne opisują zachowanie układu podczas zmian sygnałów w czasie. W przeciwieństwie do charakterystyk statycznych uwzględniają one bezwładność, opóźnienia oraz sposób przechodzenia układu pomiędzy kolejnymi stanami ustalonymi.

Układy ciągłe o parametrach skupionych opisuje się najczęściej za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Natomiast układy o parametrach rozłożonych, w których

wielkości fizyczne zależą zarówno od czasu, jak i położenia, opisuje się za pomocą równań różniczkowych cząstkowych.

W przypadku układów liniowych i stacjonarnych (**LTI** – *Linear Time-Invariant*) współczynniki równań różniczkowych nie zmieniają się w czasie, co pozwala na zastosowanie **przekształcenia Laplace'a**. Natomiast układy dyskretnie opisuje się równaniami różnicowymi, a do ich analizy wykorzystuje się transformatę Z.

METODA OPERATOROWA

Przekształcenie Laplace'a $\mathcal{L}$ odwzorowuje funkcję czasu $f(t)$ z dziedziny czasu t do dziedziny zmiennej zespolonej s . Polega na pomnożeniu funkcji czasu $f(t)$ przez czynnik e^{-st} i jej całkowaniu w granicach od zera do nieskończoności:

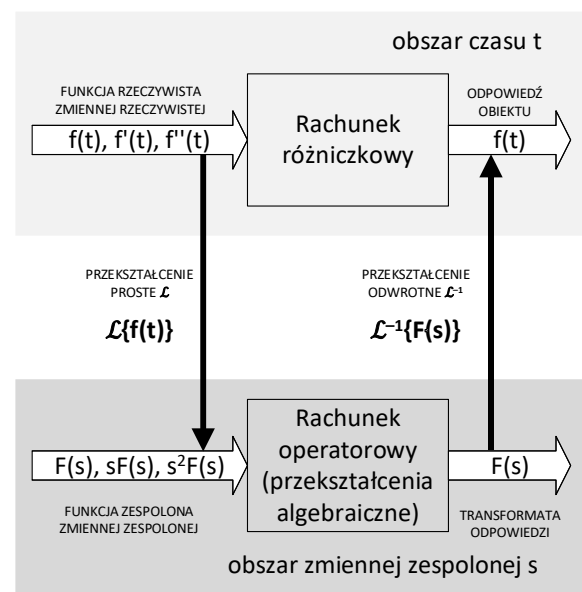
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (1)$$

Dzięki temu równanie różniczkowe zostaje zastąpione równaniem algebraicznym.

Po rozwiązaniu równania algebraicznego, wynik sprowadza się do dziedziny czasu za pomocą odwrotnego przekształcenia $\mathcal{L}^{-1}$, wykorzystując tzw. wzór Bromwicha–Mellina. W tym celu funkcję zmiennej zespolonej $F(s)$ mnoży się przez e^{st} , całkuje wzdłuż pionowej prostej na płaszczyźnie zespolonej i mnoży przez współczynnik $\frac{1}{2\pi j}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \end{aligned} \quad (2)$$

Bezpośrednie rozwiązywanie równań różniczkowych w dziedzinie czasu jest często bardzo pracochłonne. Z tego względu w analizie układów automatyki powszechnie stosuje się **metodę operatorową** opartą na opisanym przekształceniu.



Rys. 1. Schemat metody operatorowej.

TRANSMITANCJA OPERATOROWA

Transmitancja operatorowa jest funkcją wymiarną zmiennej zespolonej s , stanowiącą matematyczny opis właściwości dynamicznych układu. Definiuje się ją jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3)$$

gdzie:

$G(s)$ – transmitancja operatorowa układu,
 $Y(s)$ – transformata Laplace'a sygnału wyjściowego,
 $X(s)$ – transformata Laplace'a sygnału wejściowego.

Charakteryzuje się ona następującymi cechami:

- Zależy wyłącznie od struktury i parametrów samego układu, a nie od sygnału wejściowego.
- Nie odwzorowuje jednoznacznie budowy fizycznej obiektu – różne układy (np. elektryczne, hydrauliczne i mechaniczne) mogą mieć dokładnie tę samą transmitancję operatorową.
- Umożliwia łatwe wyznaczenie odpowiedzi układu na dowolne, dające się przekształcić wymuszenie.
- Może zostać wyznaczona zarówno analitycznie z równań różniczkowych, jak i eksperymentalnie na podstawie odpowiedzi układu na znane sygnały testowe.

Znając transmitancję oraz sygnał wejściowy, odpowiedź układu wyznacza się z zależności:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \quad (4)$$

a następnie przeprowadza odwrotne przekształcenie Laplace'a:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\} \quad (5)$$

CHARAKTERYSTYKI CZASOWE

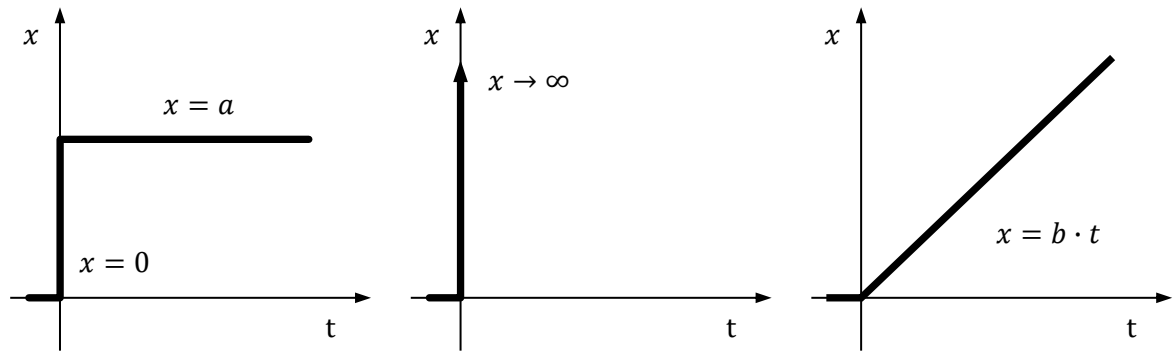
Charakterystyką czasową nazywa się przebieg sygnału wyjściowego układu w funkcji czasu w odpowiedzi na określone wymuszenie podane na wejście układu znajdującego się początkowo w stanie równowagi.

Zastosowanie znormalizowanych sygnałów testowych umożliwia porównywanie właściwości dynamicznych różnych układów oraz wyznaczanie ich parametrów dynamicznych.

Najczęściej stosowane sygnały testowe to wymuszenie skokowe, impulsowe i rampowe (Rys. 2, Tab. 1).

W praktyce najczęściej analizowana jest odpowiedź na skok jednostkowy ($a = 1$), ponieważ pozwala ona w prosty sposób wyznaczyć najważniejsze parametry dynamiczne układu, takie jak stała czasowa, opóźnienie, przeregulowanie, czy czas ustalania.

Oprócz charakterystyk czasowych do opisu właściwości dynamicznych wykorzystuje się również charakterystyki częstotliwościowe, omawiane w dalszej części kursu.



Rys. 2. Typowe wymuszenia: skokowe, impulsowe, liniowe.

Tab. 1. Typowe charakterystyki czasowe oraz odpowiadające im wymuszenia

typ charakterystyki	charakterystyka skokowa	charakterystyka impulsowa	charakterystyka rampowa
typ wymuszenia $x(t)$	wymuszenie skokowe $x(t)$	wymuszenie impulsowe $\delta(t)$	wymuszenie liniowe zależne od czasu $x(t)$
opis wymuszenia	$x(t) = 0 \cdot \mathbf{1}(t) \text{ dla } t < 0$ $x(t) = a \cdot \mathbf{1}(t) \text{ dla } t \geq 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ $\delta(t) = 0 \text{ dla } t \neq 0$ $\delta(t) = \infty \text{ dla } t = 0$	$x(t) = 0 \text{ dla } t < 0$ $x(t) = b \cdot t \cdot \mathbf{1}(t) \text{ dla } t \geq 0$
Transformata wymuszenia $X(s)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{a}{s}$	$X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{b}{s^2}$
Charakterystyka czasowa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\}$	$y(t) = h(t)$ $= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{a}{s}\right\}$	$y(t) = k(t)$ $= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot 1\}$	$y(t) = v(t)$ $= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{b}{s^2}\right\}$

CHARAKTERYSTYKI CZASOWE CZŁONÓW PODSTAWOWYCH

Dla przedstawionych wcześniej w tej instrukcji podstawowych członów automatyki można wyznaczyć ich transmitancję oraz charakterystyki. Poniżej podano wybrane charakterystyki czasowe wszystkich członów podstawowych obliczone na podstawie $Y(s)$ liczonych jako iloczyn transmitancji tych członów oraz transformat sygnału wejściowego $\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\}$ podanych w Tab. 1

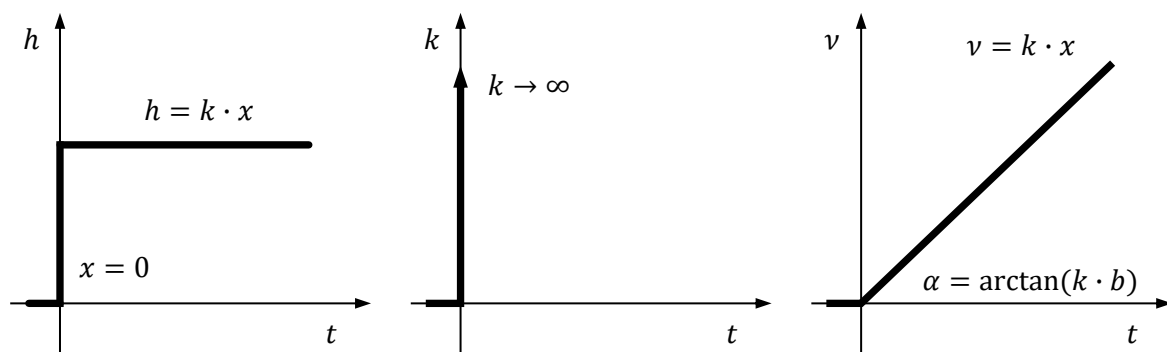
CZŁON PROPORCJONALNY

W członie proporcjonalnym (bezinercyjnym) w każdej chwili czasu sygnał wyjściowy $y(t)$ jest proporcjonalny do sygnału wejściowego $x(t)$.

Transmitancja członu proporcjonalnego: $G(s) = k$
gdzie k to współczynnik wzmocnienia, stosunek odpowiedzi $y(t)$ do wymuszenia $x(t)$.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = k \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa $K(s) = k \cdot 1$ $k(t) = k \cdot \delta(t)$
- rampowa $V(s) = k \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$

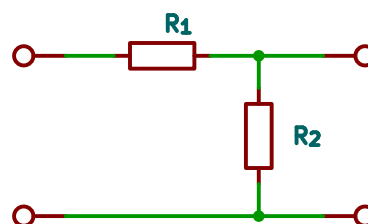


Rys. 3. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu proporcjonalnego.

Przykładem realizacji członu proporcjonalnego jest rezystancyjny dzielnik napięcia.

Transmitancja czwórnika jest dana wzorem:

$$G(s) = k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{6}$$



Rys. 4. Czwórnik proporcjonalny.

CZŁON INERCYJNY PIERWSZEGO RZĘDU

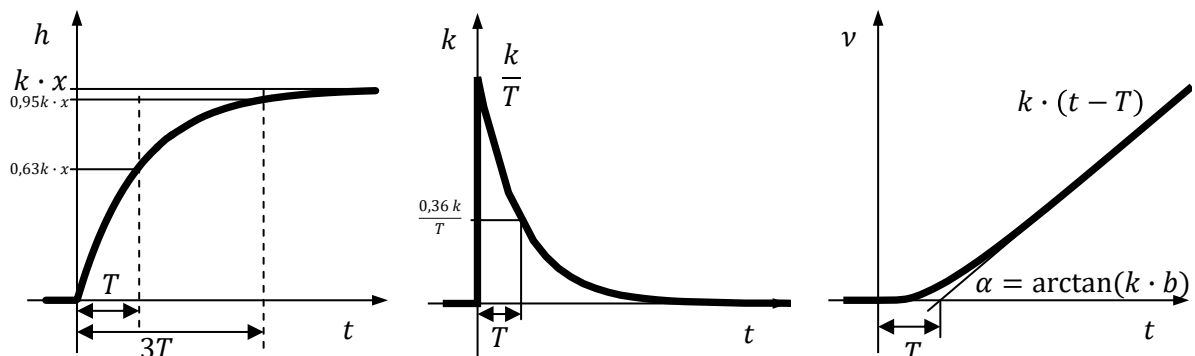
Odpowiedź czasowa członu na skutek pewnej bezwładności (inercji) charakteryzuje się występowaniem stanu przejściowego, po zaniknięciu którego sygnał wyjściowy staje się proporcjonalny do sygnału wejściowego (ze współczynnikiem proporcjonalności k)

Transmitancja członu inercyjnego: $G(s) = \frac{k}{Ts+1}$

gdzie k to współczynnik wzmacnienia, T to stała czasowa

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa $K(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot 1$ $k(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \mathbf{1}(t)$
- rampowa $V(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot \left(t - T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right) \cdot \mathbf{1}(t)$

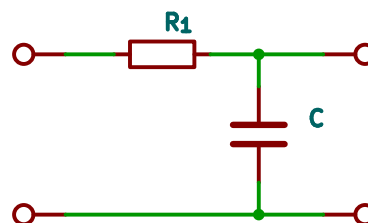


Rys. 5. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu inercyjnego I-rzędu

Przykład realizacji członu inercyjnego przedstawia czwórnik RC inercyjny.

Transmitancja czwornika RC jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{1}{RCs+1} \quad (7)$$



Rys. 6. Czwórnik RC inercyjny.

CZŁON CAŁKUJĄCY IDEALNY PIERWSZEGO RZĘDU

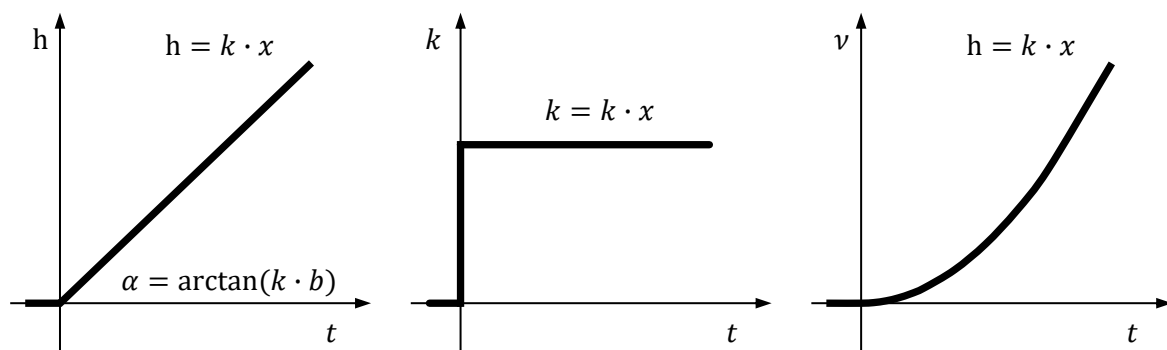
W członie całkującym idealnym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do całki sygnału wejściowego.

Transmitancja członu całkującego idealnego pierwszego rzędu: $G(s) = \frac{k}{s} = \frac{1}{T_i s}$
gdzie k to współczynnik wzmocnienia (tzw. prędkościowego), T_i czas całkowania

Jeżeli na wejściu członu całkującego idealnego pojawi się sygnał stały to sygnał wyjściowy będzie narastał w funkcji czasu liniowo. Współczynnik k reprezentuje stosunek pochodnej względem czasu (prędkości) odpowiedzi do wartości wymuszenia, stąd też nazywany jest wzmocnieniem prędkościowym.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

- skokowa $H(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa $K(s) = \frac{k}{s} \cdot 1$ $k(t) = k \cdot \mathbf{1}(t)$
- rampowa $V(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = \frac{k \cdot b}{2} \cdot t^2 \cdot \mathbf{1}(t)$



Rys. 7. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu całkującego idealnego I-rzędu.

CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY IDEALNY

W członie różniczkującym idealnym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do pochodnej sygnału wejściowego względem czasu.

Transmitancja członu różniczkującego idealnego: $G(s) = ks = T_d s$

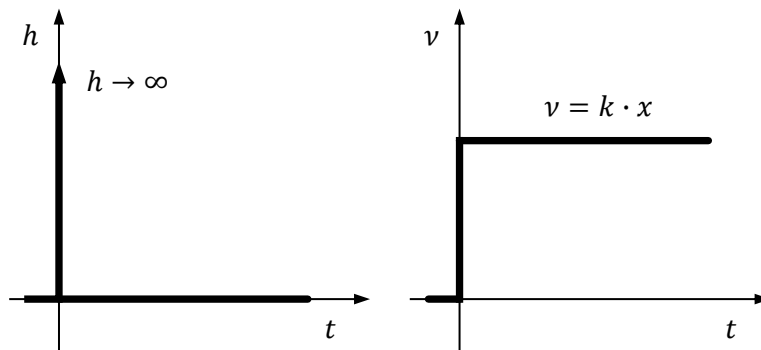
gdzie k to współczynnik wzmocnienia, T_d czas różniczkowania

Ponieważ stopień licznika transmitancji jest wyższy od stopnia mianownika człon ten jest niemożliwy do zrealizowania w praktyce i może być modelowany jedynie w przybliżeniu.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie :

● skokowa $H(s) = ks \cdot \frac{a}{s} \quad h(t) = k \cdot a \cdot \delta(t)$

● rampowa $V(s) = ks \cdot \frac{b}{s^2} \quad v(t) = k \cdot b \cdot \mathbf{1}(t)$



Rys. 8. Charakterystyka skokowa i rampowa dla członu różniczkującego idealnego.

CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY RZECZYWISTY

W członie różniczkującym idealnym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do pochodnej sygnału wejściowego względem czasu. Człon różniczkujący rzeczywisty jest układem złożonym z szeregowo połączonych członów: inercyjnego i różniczkującego idealnego.

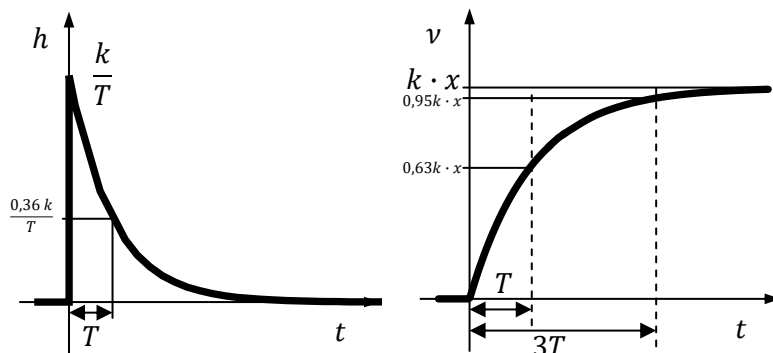
Transmitancja członu różniczkującego rzeczywistego: $G(s) = \frac{ks}{Ts+1}$

gdzie k to współczynnik wzmocnienia, T to stała czasowa

Ponieważ stopień licznika transmitancji jest wyższy od stopnia mianownika człon ten jest niemożliwy do zrealizowania w praktyce i może być modelowany jedynie w przybliżeniu.

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie :

- skokowa $H(s) = \frac{ks}{Ts+1} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = \frac{k}{T} \cdot a \cdot \left(e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$
- rampowa $V(s) = \frac{ks}{Ts+1} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$

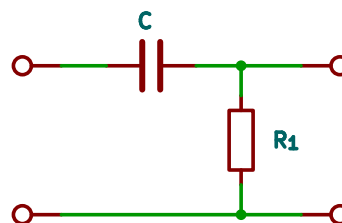


Rys. 9. Charakterystyka skokowa i rampowa dla członu różniczkującego rzeczywistego.

Przykładem realizacji członu różniczkującego rzeczywistego jest czwórnik RC różniczkujący rzeczywisty.

Transmitancja jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{ks}{Ts+1} = \frac{RCs}{RCs+1}$$



Rys. 10. Czwórnik RC różniczkujący rzeczywisty.

CZŁON OSCYLACYJNY

W członie różniczkującym idealnym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do pochodnej sygnału wejściowego względem czasu.

Transmitancja członu oscylacyjnego: $G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi s+\omega_0^2}$

gdzie ω_0 to pulsacja drgań nietłumionych, ξ to współczynnik tłumienia

Ponieważ stopień licznika transmitancji jest wyższy od stopnia mianownika człon ten jest niemożliwy do zrealizowania w praktyce i może być modelowany jedynie w przybliżeniu.

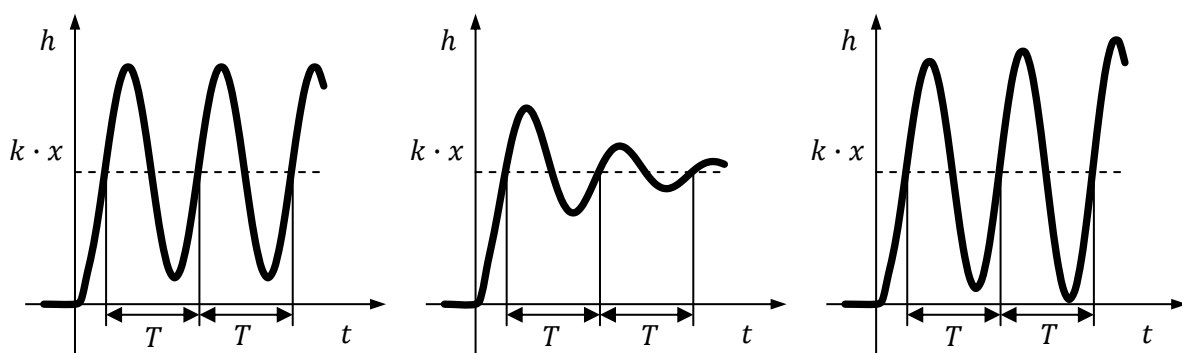
Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie :

●

skokowa

$$H(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi s+\omega_0^2} \frac{a}{s}$$

$$h(t) = k \cdot a \cdot \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 \cdot t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \right) \cdot 1(t)$$



Rys. 11. Charakterystyka skokowa dla członu oscylacyjnego dla różnych wartości współczynnika tłumienia $\xi = 0$, $\xi > 0$ oraz $\xi < 0$.

CZŁON OPÓŹNIAJĄCY

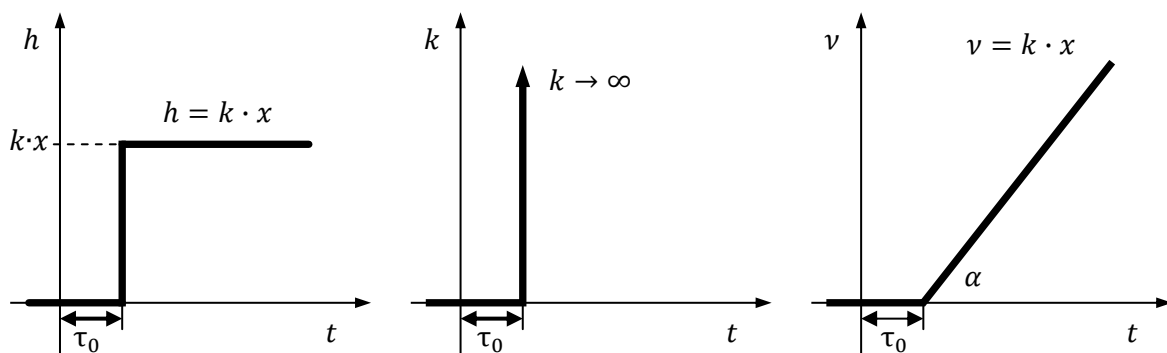
Sygnał na wyjściu członu opóźniającego pojawia się nie w chwili doprowadzenia sygnału wejściowego, lecz po upływie czasu oznaczonego przez τ_0 .

Transmitancja członu opóźniającego: $G(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s}$

gdzie k to współczynnik wzmocnienia, τ_0 opóźnienie

Odpowiednie charakterystyki czasowe $y(t)$ dane są wzorami na podstawie:

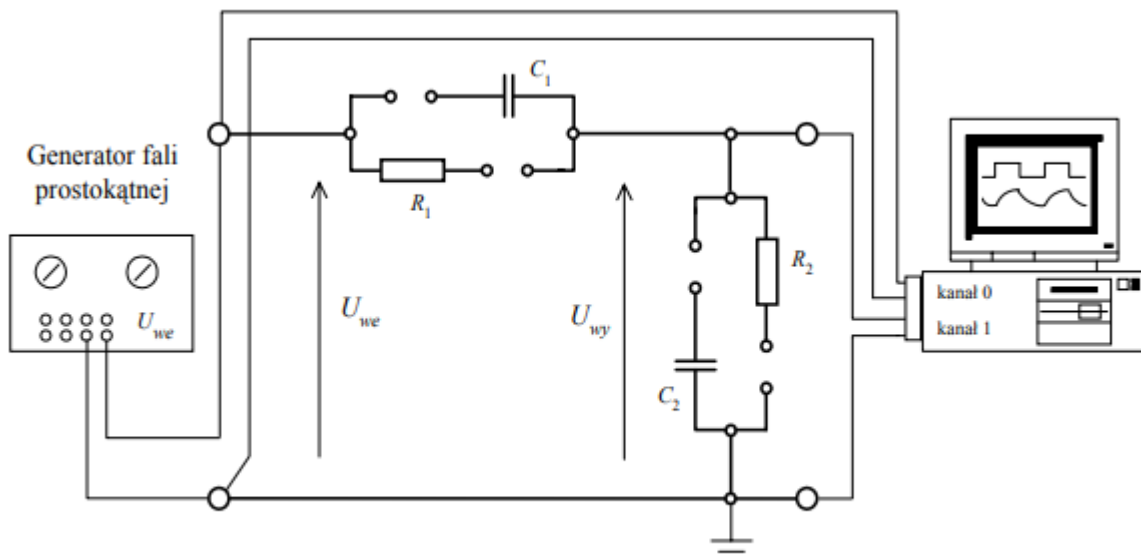
- skokowa $H(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s} \cdot \frac{a}{s}$ $h(t) = k \cdot a \cdot \mathbf{1}(t - \tau_0)$
- impulsowa $K(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s} \cdot 1$ $k(t) = k \cdot \delta(t - \tau_0)$
- rampowa $V(s) = k \cdot e^{-\tau_0 s} \cdot \frac{b}{s^2}$ $v(t) = k \cdot b \cdot (t - \tau_0) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_0)$



Rys. 12. Charakterystyka skokowa, impulsowa i rampowa dla członu opóźniającego.

STANOWISKO DYDAKTYCZNE

Ćwiczenie polega na badaniu charakterystyk skokowych członów dynamicznych zrealizowanych w formie czwórników RC. Charakterystyki poszczególnych członów zdejmowane są w układzie pomiarowym pokazanym na



Rys.1.17. Układ pomiarowy do zdejmowania charakterystyk czasowych

Rys. 13. Układ pomiarowy do rejestrowania charakterystyk czasowych.

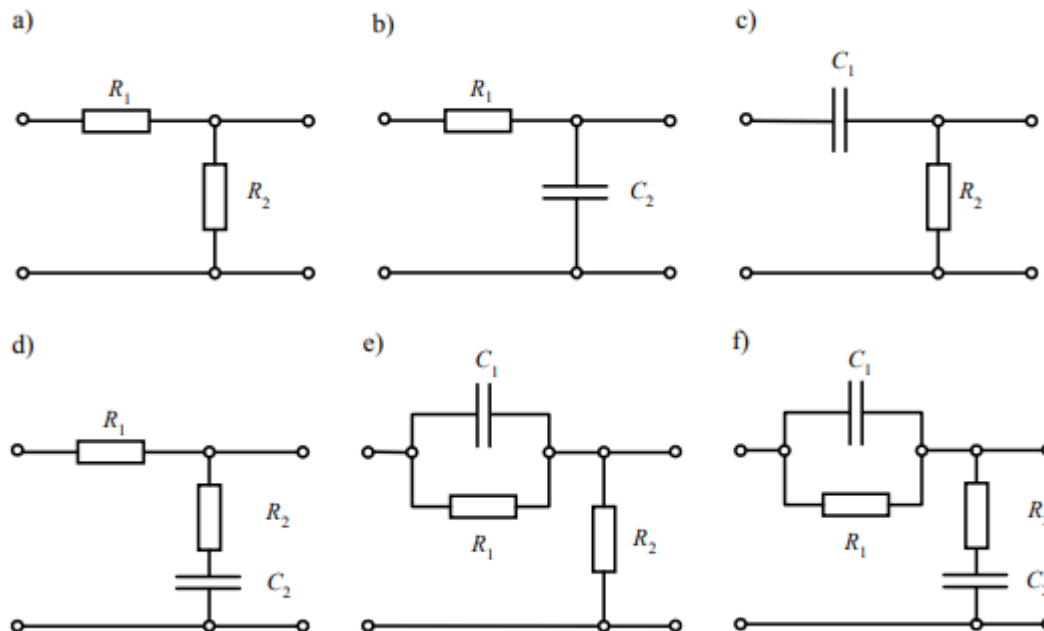
Zamiast pojedynczego sygnału skokowego na wejście badanego członu doprowadza się z generatora ciąg okresowo powtarzających się sygnałów skokowych (fale prostokątne). Na wyjściu otrzymujemy przebieg okresowy, złożony z ciągu charakterystyk skokowych danego członu. Graficzna prezentacja przebiegów jest uzyskiwana za pomocą komputerowego programu scope (prosty, cyfrowy oscyloskop). Na kanale 0 obserwujemy sygnał wejściowy z generatora U_{we} , a na kanale 1 sygnał wyjściowy z czwórnika U_{wy} .

ZADANIA DO WYKONANIA

1. Uruchomić program scope.exe.
2. Przejść do okna graficznego (poleceniem Run z menu górnego).
3. Połączyć badany czwórnik na tablicy ćwiczenia (zanotować wartości elementów RC).
4. Naciskając klawisz uruchomić rejestrację. Na monitorze powinien być uzyskiwany możliwie duży, pojedynczy przebieg. W tym celu: - szerokością przebiegu sterować poprzez ewentualną zmianę skali czasu (opcja Time/Div.) i częstotliwość sygnału z generatora. Zanotować wartość podziałki czasu!, - wysokość przebiegu dobrać poprzez zmianę wzmocnienia obu kanałów (opcja V. Scale) oraz amplitudę napięcia z generatora.
5. Wydrukować uzyskany przebieg wykorzystując opcję H.Copy (poprzez dwukrotne naciśnięcie klawisza c).

- Dokonać ponownej rejestracji i wydruku przebiegu przy innych wartościach elementów RC (tak, aby przebiegi różniły się od siebie np. dużą i małą stałą czasową).
- Sprawdzić, jaki wpływ na kształt charakterystyki skokowej ma zmiana poszczególnych elementów R i C członu. Do jakich członów zbliża się badany człon właściwościami: - przy bardzo małej stałej czasowej, - przy bardzo dużej stałej czasowej.

Punkty 3-7 powtórzyć dla kolejnych czwórników RC ustawionych w następującej kolejności:



Rys. 14. Zestaw czwórników RC badanych w ćwiczeniu: a) proporcjonalny, b) inercyjny I-go rzędu, c) różniczkujący rzeczywisty, d) opóźniający fazę, e) przyspieszający fazę, f) opóźniająco-przyspieszający fazę.

OPRACOWANIE SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać dla każdego badanego czwórnika:

- Schemat połączeń i wartości elementów RC,
- Teoretycznie wyprowadzenie transmitancji operatorowej $G(s)$ członu. Wyrażenie parametrów transmitancji: T , k (ewentualnie α) jako funkcji odpowiednich elementów RC i wyznaczenie ich wartości liczbowej (patrz przykład obliczeniowy) - dla każdego z członów parametry transmitancji oblicza się dla dwóch wybranych wcześniej wartości elementów RC,
- Graficzne wyznaczenie z wykresów parametrów transmitancji i porównanie ich z wartościami uzyskanymi w punkcie poprzednim,
- Omówienie zaobserwowanego wpływu zmian wartości poszczególnych elementów R i C członu na kształt charakterystyki skokowej (powiązać parametry RC ze stałą czasową T , współczynnikiem wzmocnienia k , ewentualnie współczynnikiem α).

Sprawdzić zgodność obserwacji z wyliczeniami teoretycznymi. Omówić możliwe przyczyny

ewentualnych rozbieżności wyników doświadczalnych i teoretycznych oraz przedyskutować granicę zaufania do wyników identyfikacji eksperymentalnej.

PYTANIA KONTROLNE

1. Podaj wzór na transmitancję operatorową oraz go omów.
2. Do czego służy proste i odwrotne przekształcenie Laplace'a?
3. Co trzeba znać, aby obliczyć odpowiedź układu?
4. Czym różni się wymuszenie: skokowe, impulsowe i rampowe?
5. Czym różni się wymuszenie od charakterystyki czasowej?
6. Czym różni się $H(s)$ od $h(t)$?
7. Jaki wpływ na odpowiedź układu ma typ członu?
8. Który człon nie jest możliwy do zrealizowania w praktyce? Dlaczego?
9. Dwa układy mają ten sam sygnał wejściowy, ale jeden reaguje natychmiast, a drugi z opóźnieniem. Który z nich wymaga opisu dynamicznego?

LITERATURA

- [1] Rosołowski E., Podstawy regulacji automatycznej, Wrocław 2021. [Dostęp online](#)
- [2] Wiśniewski T., Zaawansowane metody syntezy układów regulacji bloku energetycznego, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011, 144 s. ISBN 978-83-7493-621-7. [Dostęp online](#)
- [3] Stefański T., Teoria sterowania. Cz. I, Układy liniowe, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce. [Dostęp online: Dostęp online](#)
- [4] Mikulczyński T. (red.), Laboratorium podstaw automatyki i automatyzacji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005. [Dostęp online](#)
- [5] Zespół Automatyki, Charakterystyki czasowe członów dynamicznych, instrukcja do ćwiczenia laboratoryjnego, Częstochowa. [Dostęp online](#)

MATERIAŁY DODATKOWE

- [1] The MathWorks, Inc., MATLAB and Simulink. [Dostęp online](#)
- [2] Artikel Software, Free Download Engineering Ebooks. [Dostęp online](#)
- [3] Kuo B. C., Golnaraghi F., Automatic Control Systems, 8th ed., Wiley — materiały dodatkowe do książki. [Dostęp online](#)
- [4] The MathWorks, Inc., Digital Control of Dynamic Systems, 3e – MATLAB programs, MATLAB Central File Exchange. [Dostęp online](#)